Александр А. Локшин

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Учебное пособие

Второе издание, исправленное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2023

УДК 511.1(072)
ББК 22.130я7
Л73

https://elibrary.ru/rwhkao

Рецензент:
Е.А. Иванова – канд. физ.-мат. наук, доцент
(МПГУ, кафедра математики и информатики в начальной школе)

Локшин, Александр Александрович.

Л73 **Арифметика на чашечных весах :** учебное пособие / А.А. Локшин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2023. – 44 с.: ил.

ISBN 978-5-317-06972-8

Пособие состоит исключительно из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Адресовано школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников.

УДК 511.1(072)
ББК 22.130я7

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Учебное пособие

2-е изд., испр. и доп.

В издании использованы рисунки А.А. Локшина

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс». Главный редактор: *Е.М. Бугачева.*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова.* Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 25.04.2023 г.
Формат 84x108 1/32. Усл. печ. л. 2,31. Тираж 25 экз. Заказ 055.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к. Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н

ISBN 978-5-317-06972-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта маленькая книжка представляет собой продолжение пособия «Арифметика на чашечных весах» [1], посвященного иллюстрации (или, если угодно, экспериментальному подтверждению) основных арифметических законов. Использование блоков и разноплечих чашечных весов позволило сделать изложение наглядным и компактным.

Настоящее пособие состоит исключительно из арифметических задач, сформулированных в виде элементарных физических опытов с чашечными весами. Часть задач была ранее опубликована (с решениями) в [2].

Фактически, этой книжкой можно пользоваться независимо от [1]. При этом от читателя требуется знать (или интуитивно понимать) два элементарных физических факта:

1. *«Закон рычага».* Этот закон, открытый Архимедом, гласит: *Пусть имеется рычаг, плечи которого имеют соответственно длины L_1 и L_2. Для равновесия этого рычага необходимо и достаточно, чтобы силы F_1 и F_2, приложенные к соответствующим плечам, были направлены в одну сторону и удовлетворяли условию: $F_1L_1 = F_2L_2$.*

2. «Закон действия блока». *Неподвижный груз, перекинутый через блок, тянет плечо рычага вверх с силой, равной по величине своему весу.*

Всюду ниже мы будем для простоты считать рычаг и чаши весов невесомыми; кроме того, будем считать невесомой нить, перекинутую через блок.

Что касается систем единиц длины и веса, используемых ниже в задачах, то они могут быть взяты любыми, и их обозначения всюду опускаются. Таким образом, мы будем оперировать ниже с числовыми значениями соответствующих физических величин (длины и веса). Если угодно, можно считать, что вес всех грузов измеряется в килограммах, а длины плеч рычагов – в дециметрах. Книжка адресована школьным учителям, студентам педвузов и родителям школьников. Во втором издании добавлены параграфы 5 и 6, в которых обсуждаются различные способы взвешивания произвольных грузов на «неправильных» чашечных весах.

Автор признателен Наташе Десятсковой за полезные обсуждения, касающиеся рисунков.

Автор
Москва, 14.04.2023

§1. Задачи на равноплечих весах

Задача 1. *Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 1). Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии.*

Задача 2. *Даны равноплечие весы и система гирь, расположенных на чашах этих весов (см. рис. 2). Расставить такие числовые значения веса на гирях, чтобы правая чаша весов опустилась вниз.*

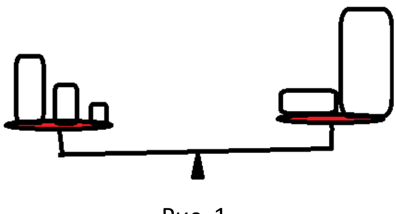


Рис. 1

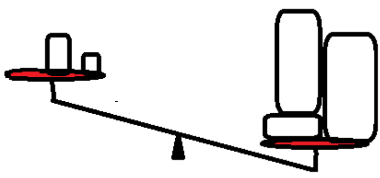


Рис. 2

Задача 3. *Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в равновесии (см. рис. 3).*

Задача 4. *Расставить числовые значения веса на гирях, если известно, что чашечные весы находятся в* равновесии *(см. рис. 4).*

Замечание. Для весов, находящихся в равновесии вес любого груза, перекинутого через блок, не может превышать веса связанного с ним груза, стоящего на чаше весов.

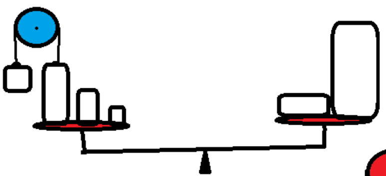
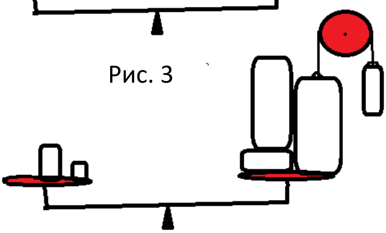


Рис. 3



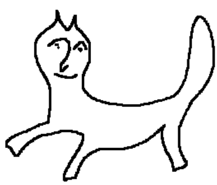


Рис. 4

Задача 5. *Определить численное значение x веса гири, перекинутой через блок, расположенный над левой чашей весов, находящихся в равновесии (см. рис. 5).*

Задача 6. *Определить численное значение x веса гири, расположенной на правой чаше весов, находящихся в равновесии (см. рис. 6).*

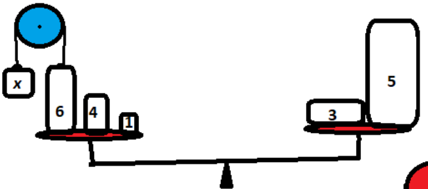


Рис. 5

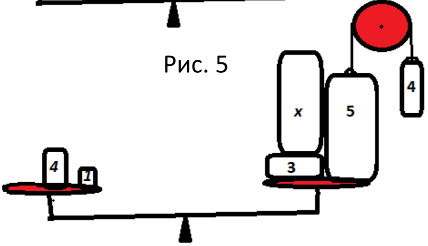


Рис. 6

Задача 7. *Определить х из условия равновесия равноплечих весов на рис. 7.*

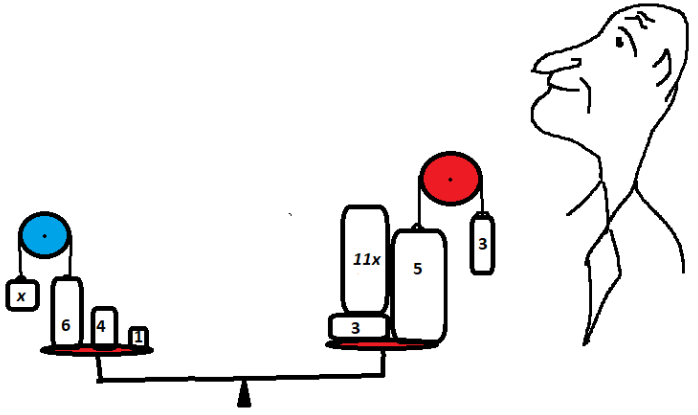


Рис. 7

Задача 8. *Определить х из условия равновесия равноплечих весов на рис. 8.*

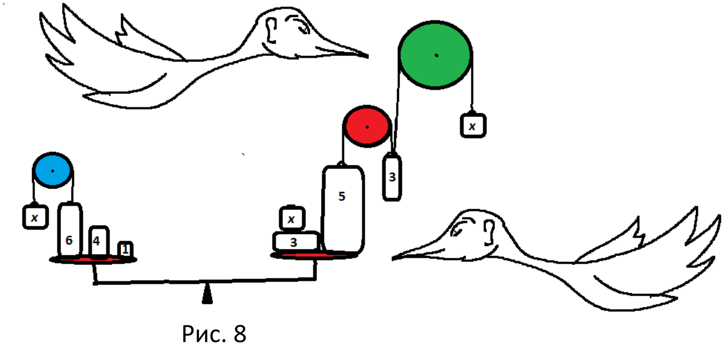


Рис. 8

Задача 9. *Возможно ли при некотором x равновесие равноплечих весов, изображенных на рис. 9?*

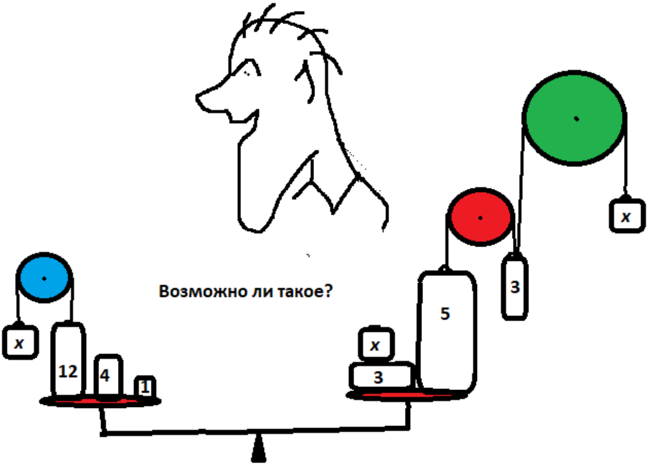


Рис. 9

§2. Задачи на неравноплечих весах

Задача 10. *Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 10. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

Задача 11. *Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого; см. рис. 11. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

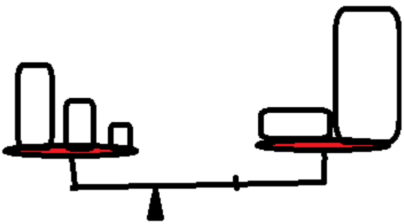


Рис. 10

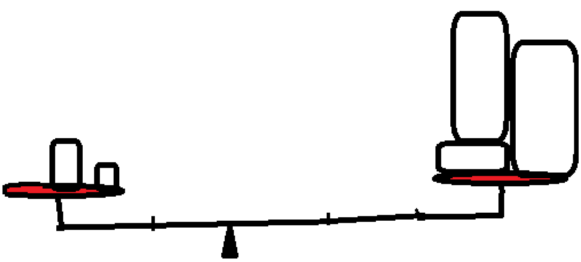


Рис. 11

Задача 12. *Правое плечо чашечных весов вдвое длиннее левого; см. рис. 12. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

Задача 13. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 13. Проставить численные значения веса грузов, при которых достигается равновесие. Привести несколько возможных вариантов.*

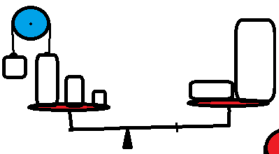


Рис. 12

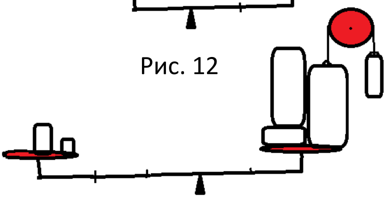
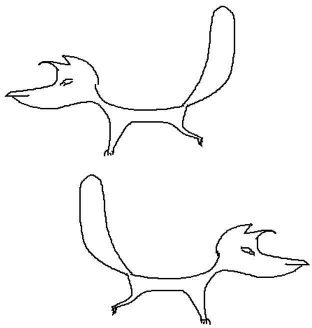


Рис. 13



Задача 14. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 14. Найти численное значение x веса груза, перекинутого через блок. (Весы находятся в равновесии.)*

Задача 15. *Левое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее правого; см. рис. 15. Найти численное значение x веса груза на правой чаше, при условии, что весы находятся в равновесии.*

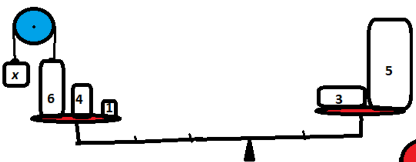


Рис. 14

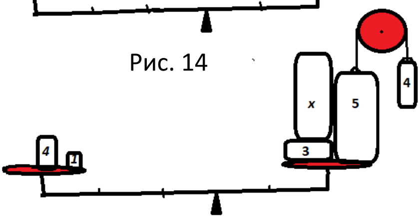
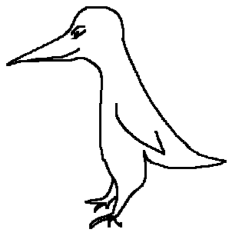


Рис. 15



Задача 16. *Левое плечо находящихся в равновесии чашечных весов в полтора раза короче правого; см. рис. 16. Найти численное значение х.*

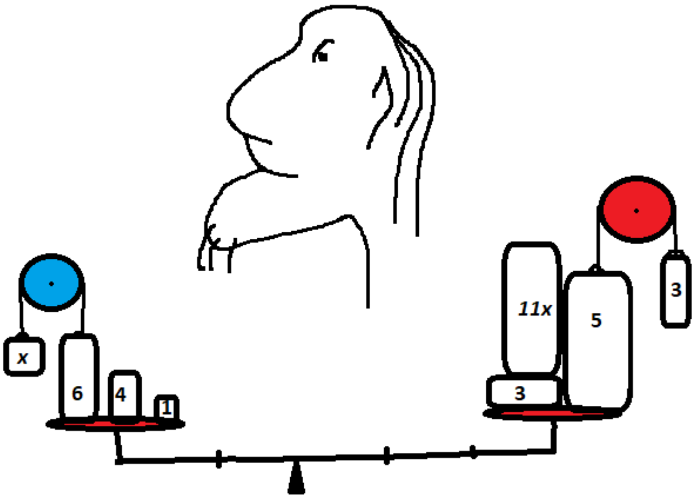


Рис. 16

§3. Разные задачи

Задача 17. *Найти численное значение x, обеспечивающее равновесие чашечных весов на рис. 17.*

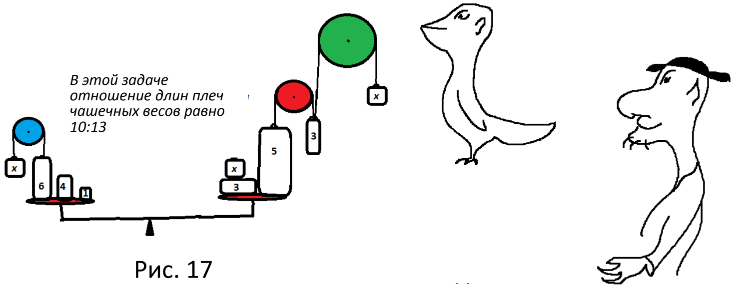


Рис. 17

Задача 18. *Возможно ли при некотором x равновесие чашечных весов, изображенных на рис. 18?*

Рис. 18

Задача 19. *Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 19.*

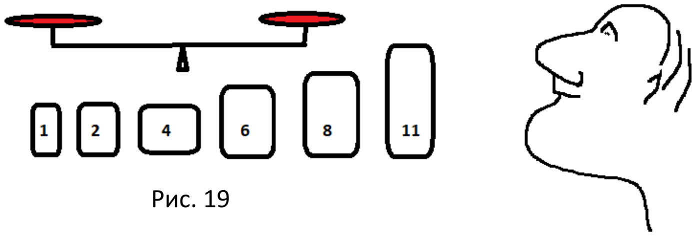


Рис. 19

Задача 20. *Требуется расположить грузы на равноплечих чашечных весах таким образом, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 20.*

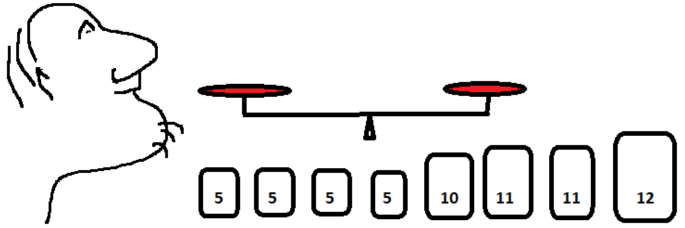


Рис. 20

Указание. Заметим, что веса всех гирь, кроме гирь с весами 11; 11; 12, делятся на 5. Для того, чтобы весы после расстановки всех гирь оставались в равновесии, необходимо, чтобы остатки от деления на 5 сумм весов гирь на каждой из чаш были равны. Это возможно лишь в том случае, если обе гири с весами 11; 11 и гиря с весом 12 будут располагаться на разных чашах. Дальнейшее очевидно.

Задача 21. *Снова равноплечие весы, и снова требуется расположить грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 21.*

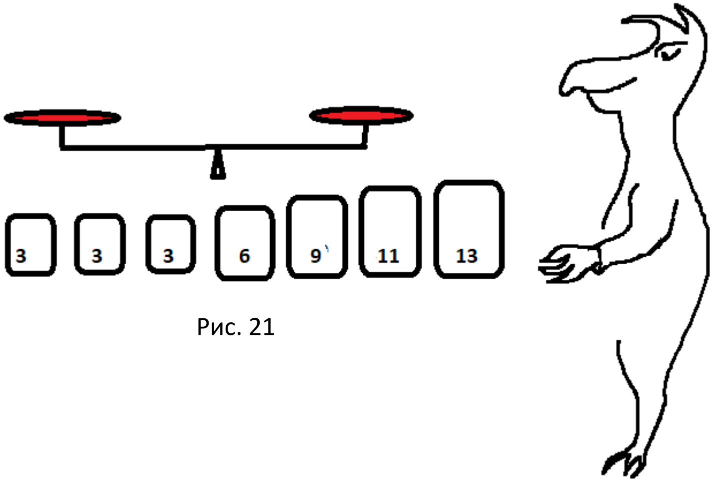


Рис. 21

Задача 22*. *Правое плечо чашечных весов в полтора раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 22.*

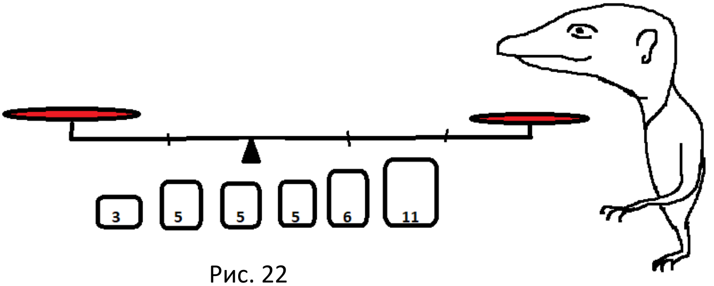


Рис. 22

Задача 23. *Правое плечо чашечных весов в три раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 23.*

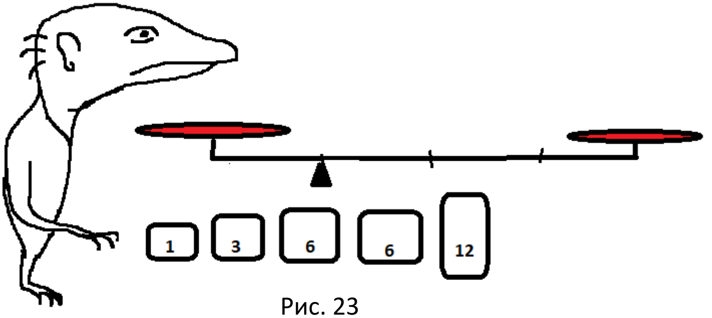


Рис. 23

Задача 24. *Правое плечо чашечных весов в два раза длиннее левого. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 24.*

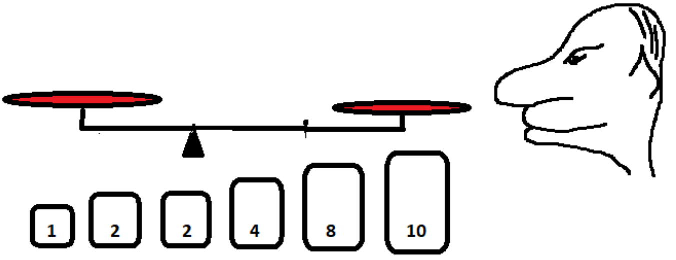


Рис. 24

Задача 25. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 25.*

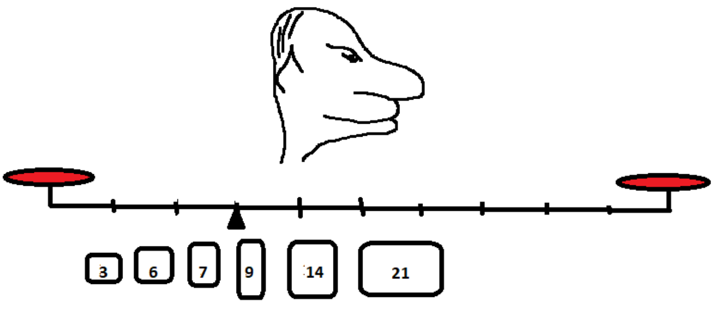


Рис. 25

Задача 26. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 3:7. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 26.*

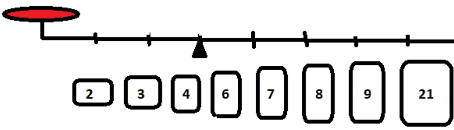
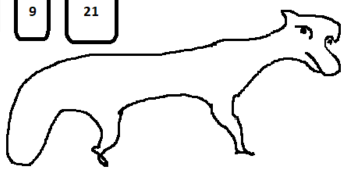
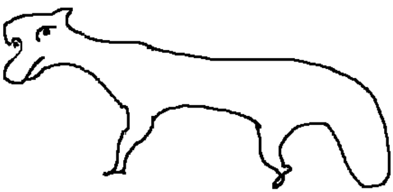


Рис. 26



Задача 27. *Длины плеч чашечных весов относятся, как 2:3. Требуется расположить имеющиеся грузы так, чтобы весы оставались в равновесии; см. рис. 27.*



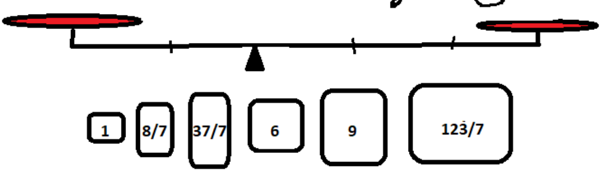


Рис. 27

Указание. Для равновесия рассматриваемых чашечных весов необходимо, чтобы суммы весов поставленных гирь, умноженные на длины соответствующих плеч, имели одинаковые дробные части для обеих чаш. Отсюда нетрудно вывести, что все гири дробного веса из имеющегося набора должны находиться на одной и той же чаше. Дальнейшее очевидно.

Задача 27а (см. [2]). *Даны уравновешенные, но неправильные чашечные весы (длина левого плеча равна 7 единицам, а длина правого плеча равна 9 единицам) и набор гирь с весами:*

9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100.

Требуется так расставить все эти гири на обеих чашах весов, чтобы весы оставались в равновесии.

Решение. Прежде всего, перепишем еще раз список числовых значений весов всех гирь, указав в скобках величины остатков при делении на 9:

9 (0); 18 (0); 19 (1); 27 (0); 33 (6); 46 (1);

100 (1); 100 (1). (6')

Итак, *пять* из восьми числовых значений весов гирь имеют ненулевые остатки при делении на 9. Все пять соответствующих гирь поставить на правую чашу, очевидно, невозможно (правая чаша перетянет левую). Следовательно, некоторые из упомянутых пяти гирь придется поставить на левую чашу, но при этом сумма соответствующих остатков должна делиться на 9. Ясно, что на левую чашу придется поставить четыре гири из упомянутых пяти. Короткий перебор вариантов приводит к ответу: на левую чашу следует поставить гири с весами 19; 33: 46: 100, а на правую чашу – все остальные гири.

Замечание. Составлять подобные задачи (имеющие ключ к быстрому решению) легко, а их решение может оказаться полезным для установления связей между математикой и физикой.

Вот как была составлена задача 27а. Пусть даны уравновешенные, но неравноплечие чашечные весы (длина левого плеча 7 единиц, длина правого плеча 9 единиц). Будем составлять набор гирь с такими целочисленными весами, что, поставив гири на обе чаши, мы оставим наши чашечные весы в равновесии.

Из этого условия ясно, что полный набор гирь, который нам нужен, должен состоять из двух непересекающихся групп гирь – «левой» и «правой». При этом суммарный вес «левой» группы должен нацело делиться на 9, а суммарный вес «правой» группы должен нацело делиться на 7. «Левую» группу гирь составляем с таким расчетом, чтобы вес каждой отдельно взятой гири имел ненулевой остаток при делении на 9.

Например, возьмем в качестве значений весов гирь из «левой» группы такие числа:

19 (1), 33 (6), 46 (1), 100 (1) (*)

(в скобках указаны значения остатков при делении соответствующих чисел на 9).

Суммируя веса гирь из «левой» группы, т.е. числа из набора (*), стоящие вне скобок, и умножая результат на 7, получаем численное значение момента силы, направленного против часовой стрелки:

$$M = 7(19 + 33 + 46 + 100) = 1386.$$

(Этот момент силы возникает от воздействия силы тяжести «левой» группы гирь на левое плечо наших чашечных весов.)

Таким же численным значением должен обладать момент силы, направленный по часовой стрелке, возникающий от воздействия силы тяжести «правой» группы гирь на правое плечо наших чашечных весов. Сумма весов «правой» группы гирь, очевидно, должна быть равна частному

$$M : 9 = 1386 : 9 = 154.$$

Теперь найденную сумму весов «правых» гирь можно «набирать» из отдельных слагаемых более-менее произвольным образом. Однако для того, чтобы у нашей задачи образовался «ключ» к быстрому решению, представим число 154 в виде суммы таких слагаемых, из которых все, кроме одного, будут делиться на 9.

Например, положим:

154 = 100 + 9 + 18 + 27.

Итак, численные значения весов «правых» гирь – это слагаемые в правой части предыдущего равенства.

В результате получаем следующий объединенный набор гирь («левых» и «правых»):

9; 18; 19; 27; 33; 46; 100; 100. (**)

Составление задачи 27а закончено.

Задача 28. *Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 28 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:3) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

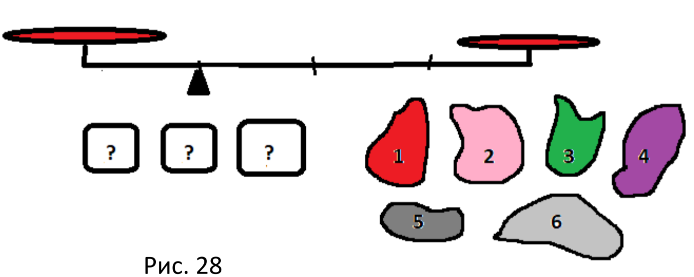


Рис. 28

Задача 29. *Сколько должна весить каждая из трех гирь, чтобы на изображенных на рис. 29 неравноплечих чашечных весах (у которых отношение длин плеч равно 1:2) можно было уравновесить каждый из шести грузов, численные значения весов которых соответственно равны 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

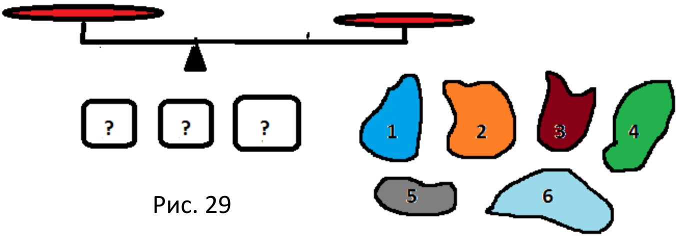


Рис. 29

Задача 30. *На рис. 30 изображены неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 2:3. Возможно ли точно отвесить на этих весах 1/6 кг муки с помощью трех гирь весом соответственно в 1 кг и 2 кг?*

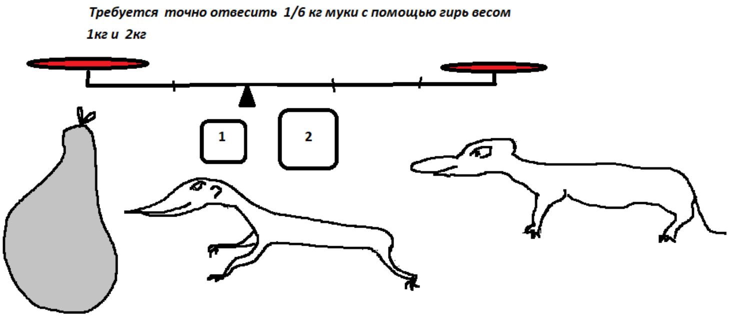


Рис. 30

Указание. Задача решается в два действия:

1) $2x = 3\times1$; $x = 3/2$.

2) $3(3/2 - y) = 2\times2$; $y = 1/6$.

§4. Поиск фальшивой монеты на неравноплечих весах

Задача 31. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 1:3 (см. рис. 31). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах гарантированно определить фальшивую монету.*

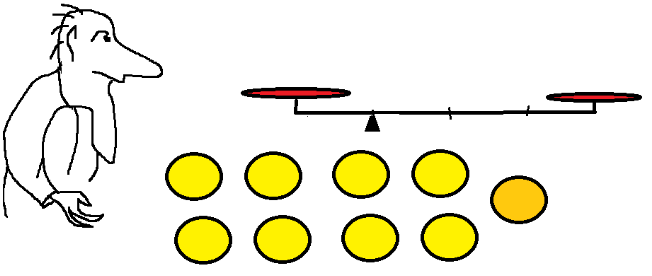


Рис. 31

Указание. При первом взвешивании на левую чашу можно положить шесть монет, а на правую – две. Впрочем, можно начать действовать и иначе: при первом взвешивании положить на левую чашу три монеты, а на правую – одну.

Задача 32. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно 2:5 (см. рис. 32). Далее, имеются 9 монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Требуется за три взвешивания на упомянутых весах с гарантией определить фальшивую монету.*

Указание. При первом взвешивании на левую чашу следует положить пять монет, а на правую – две.

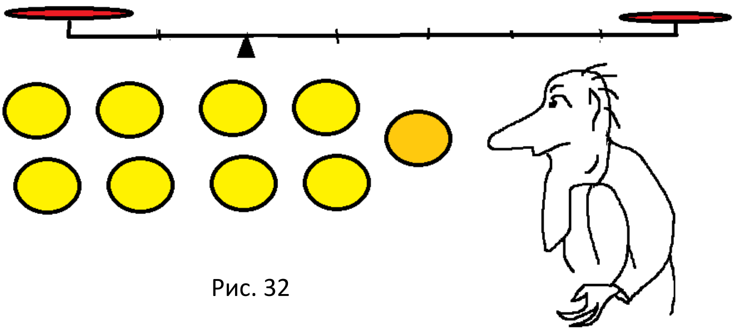


Рис. 32

Задача 33. *Имеются неравноплечие чашечные весы, у которых соотношение длин плеч равно $m:n$. Далее, имеется $m+n+1$ монет, неотличимых друг от друга на вид, среди которых – одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих.*

А) За какое наименьшее количество взвешиваний можно с гарантией определить фальшивую монету?

Б) Тот же вопрос, если имеется всего $m+n+k$ монет.

В) Тот же вопрос, если известно только, то фальшивая монета другого веса, чем настоящие (но неизвестно – легче она или тяжелее).

§5. Взвешивание произвольного груза на неравноплечих весах и «двоичная система гирь»

В этом параграфе мы разовьем известную идею (содержащуюся, например, в [4]) о том, как отвесить на неравноплечих не уравновешенных чашечных весах ровно 1 кг сыпучего груза, если имеется правильная гиря весом в 1 кг. Нетривиальная идея, лежащая в основе решения этой задачи, заключается в том, что вначале следует уравновесить сыпучим грузом правильную гирю, а затем *гирю снять* и добиться равновесия весов с помощью второй порции сыпучего груза, помещенной на место убранной гири. Эта вторая порция и будет весить ровно 1 кг. (См. похожую задачу также в [1].)

Здесь мы несколько изменим вышеописанный подход, сделав его применимым не только к случаю, когда нужно отвесить на неправильных весах заранее заданное количество вещества, но и к более общему случаю, когда нужно определить вес произвольного груза.

Вначале введем определение. Назовем систему гирь с весами

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, … (*)

двоичной системой гирь.

Итак, наша задача формулируется несколько по-другому, чем в [4].

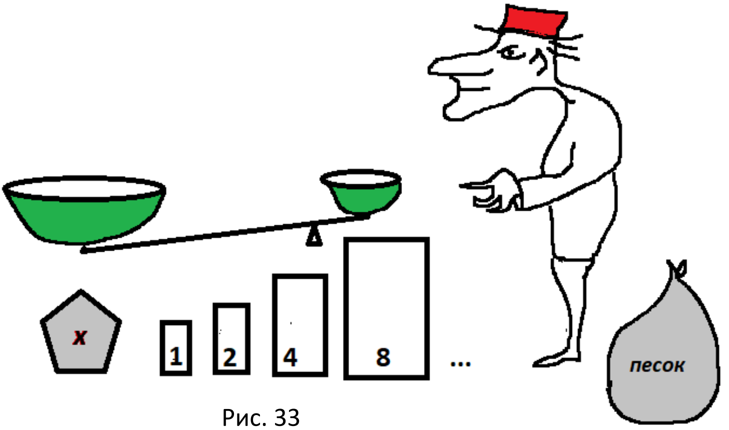


Рис. 33

Задача 34. *Имеются неравноплечие, не уравновешенные чашечные весы, двоичная система гирь (*), мешок с песком и произвольный твердый груз X, который нужно взвесить на имеющихся весах с точностью до ½ грамма. Требуется описать алгоритм такого взвешивания.*

Решение. Для определенности, считаем, что вес груза *X* не превосходит 127 г, т.е. суммарного веса гирь с весами

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г.

Алгоритм состоит в следующем. Вначале уравновешиваем на имеющихся весах груз *X* при помощи песка. (Груз X кладем, например, на левую чашу, а песок – сыплем на правую.) Затем снимаем груз X с левой чаши и кладем на нее гирю весом 64 г. Если весы оказываются в равновесии, задача решена. (Очевидно, что вес груза X будет в точности равен 64 г.) Если же левая чаша перевешивает, снимаем поставленную гирю с весов (*в дальнейшем ее уже не используем*) и заменяем ее следующей по весу; так действуем до тех пор, пока это возможно. Если же перевешивает правая чаша, то добавляем к поставленной гире весом в 64 г (*которую в дальнейшем уже не трогаем*) следующую по весу, т.е. гирю весом в 32 г. Затем процедура повторяется, снова рассматриваем три случая; в первом случае, когда весы оказываются в равновесии, задача оказывается решенной (вес груза X в этом случае будет равен 64 г + 32 г = 96 г). Если левая чаша перевешивает, то снимаем гирю весом в 32 г и заменяем следующей по весу; так действуем, пока это возможно. Если же перевешивает правая чаша, то добавляем к ранее поставленным гирям следующую по весу, и процедура повторяется.

Нетрудно понять, что процедура закончится, когда исчерпаются все использованные гири.

В итоге вес груза X будет приблизительно равен сумме весов всех гирь, оказавшихся на левой чаше в конце процедуры. Истинный вес груза X может отличаться в ту или иную сторону от этой суммы на 1 г. Точность в ½ грамма можно достичь следующим способом. Если в конце процедуры левая чаша перевешивает, а сумма весов всех находящихся на ней гирь равна n граммам, то вес груза X следует положить равным (n – ½) граммам, если же в итоге перевешивает правая чаша, то вес груза X следует положить равным (n + ½) граммам.

Замечание. Читатель может заинтересоваться вопросом: всегда ли упомянутый удобный способ нахождения веса произвольного груза X срабатывает, нет ли здесь исключений. Законность приведенного способа доказывается методом математической индукции (см. Добавление).

§6. Неправильные весы и среднее геометрическое неправильных значений веса

Допустим, что в нашем распоряжении имеются неправильные, но уравновешенные весы, причем соотношение длин плеч этих весов неизвестно и не может быть непосредственно измерено. (Например, коромысло весов может быть подвешено к потолку.) Будем, кроме того, считать, что мы располагаем *расширенной двоичной системой гирь*, а именно – всеми гирями с весами

…1/8г, ¼ г, ½ г, 1г, 2г, 4г, 8г, 16г, 32г, 64г, 128г, …

Приведем еще один способ нахождения веса $P(X)$ произвольного груза X на имеющихся неправильных весах.

Прежде всего, обозначим длину левого и правого плеча наших весов через L_1 и L_2 соответственно. Положим груз X на правую чашу весов и уравновесим его с помощью набора гирь с общим весом P_1 . В результате получим по закону рычага:

$$P_1L_1 = P(X)L_2. \qquad (*)$$

Уберем теперь с весов все, что было на них положено. Затем поместим груз X на левую чашу и уравновесим его с помощью нового набора имеющихся гирь с общим весом P_2. Получим:

$$P_2L_2 = P(X)L_1. \qquad (**)$$

Поделив равенство (**) на (*), получим:

$$P_2L_2/ P_1L_1 = L_1/L_2,$$

т.е.

$$P_2/ P_1 = (L_1/L_2)^2,$$

откуда имеем:

$$L_1/L_2 = (P_2/ P_1)^{1/2}.$$

Подставляя теперь последнее соотношение в (*), получаем искомое выражение для $P(X)$:

$$P(X) = P_1(P_2/ P_1)^{1/2} = (P_1P_2)^{1/2}. \qquad (***)$$

Замечание. На школьных занятиях этот результат можно использовать, например, следующим образом. Сначала при помощи взвешиваний получить значения P_1 и P_2 , затем перемножить эти значения на калькуляторе и извлечь из произведения квадратный корень. После чего взвесить груз *X* на обычных весах со стрелкой и сравнить результаты. Не исключено, что такой опыт может содействовать взаимному проникновению школьной физики и математики.

Замечание. Формула (***) позволяет без труда проверить при помощи чашечных весов справедливость неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$(P_1P_2)^{1/2} \leq (P_1 + P_2)/2. \qquad (****)$$

(Неравенство (****) будет на самом деле строгим, т.к. $P_1 \neq P_2$, поскольку плечи L_1 и L_2 не равны.)

Для проверки неравенства (****) необходимо иметь два идентичных набора «двоичных» гирь, где каждая гиря была бы составлена из двух одинаковых половинок. Кроме того, нужны неравноплечие уравновешенные чашечные весы, а также обычные чашечные весы (равноплечие и уравновешенные). Проверка неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим сведется к установлению того факта, что на правильных чашечных весах груз X поднимется вверх при попытке уравновесить его грузом с весом $(P_1 + P_2)/2$.

Задача 35. *Имеются неравноплечие уравновешенные чашечные весы. Груз X весом 16 кг был сначала положен на левую чашу весов и уравновешен целочисленным грузом P_1, затем груз X был положен на правую чашу весов и уравновешен целочисленным грузом P_2. Чему равно отношение длин плеч рассматриваемых неравноплечих весов?*

Задача 36. *Имеются неравноплечие уравновешенные чашечные весы. Груз X был сначала положен на* *левую чашу весов и уравновешен гирей P_1 (причем численное значение веса, обозначенное на этой гире, на 10% меньше ее истинного веса). Затем груз X был положен на правую чашу весов и уравновешен гирей P_2 (причем численное значение веса, обозначенное на этой гире, на 10% больше ее истинного веса).С какой погрешностью был установлен вес груза X?*

Добавление.
КОЕ-ЧТО О ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ [5]

1. Алгоритм перевода числа из десятичной записи в p-ичную хорошо известен. Пусть, например, требуется записать в семеричной системе десятичное число $a = 108$. Сначала делим 108 с остатком на 7 и получаем:

$$108 = 15\times7 + 3. \qquad (Д.1)$$

Здесь остаток от деления, т.е. число 3, – это и есть последняя (младшая) цифра в записи нашего числа a в семеричной системе. Теперь возьмем в предыдущей формуле неполное частное 15 и снова применим деление на 7 с остатком. Имеем:

$$15 = 2\times7 + 1.$$

Подставляя это выражение в (Д.1), получаем:

$$108 = (2\times7 + 1)\times7 + 3,$$

откуда

$$108 = 2\times7^2 + 1\times7 + 3.$$

В результате семеричная запись нашего числа имеет вид $213_{(7)}$, т.е.

$$108 = 213_{(7)}. \qquad (Д.2)$$

Итак, упомянутый алгоритм несложен и, казалось бы, не может быть упрощен или улучшен. Подчеркнем, что в этом алгоритме цифры *p*-ичной записи появляются по очереди, начиная от самого младшего разряда (разряда единиц) и заканчивая цифрой самого старшего разряда. Иными словами, *p*-ичная запись числа *a* постепенно пишется *справа налево*. Существует, однако, совершенно иной способ, при котором *p*-ичная запись постепенно пишется *слева направо*.

2. Лучше всего преимущества этого второго способа удается продемонстрировать при переходе от десятичной записи к двоичной. Дело в том, что в двоичной системе кроме нуля (а нуль – это, в сущности, не столько цифра, сколько значок пропуска разряда) имеется только одна цифра – единица. Попробуем записать теперь число 108 в двоичной системе. Конечно, можно было бы воспользоваться тем же алгоритмом, что и в. п. 1, но это было бы нерационально.

Вместо этого мы поступим следующим образом. Начнем выписывать последовательные степени двойки:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. (Д.3)

(Здесь мы остановились, так как следующая степень двойки, 128, уже больше, чем наше число $a = 108$.)

Теперь начинаем последовательно «набирать» 108 из степеней (Д.3), начиная со старших степеней и двигаясь в сторону младших.

Имеем:

$64 < 108$,

$64 + 32 = 96 < 108$,

$64 + 32 + 16$ – больше, чем 108, поэтому берем из ряда степеней (Д.3) в качестве следующего слагаемого 8 (вместо 16):

$64 + 32 + 8 = 104 < 108$,

$64 + 32 + 8 + 4 = 108$. (Д.4)

Итак, цель достигнута. Поскольку

$64 = 2^6$, $32 = 2^5$, $8 = 2^3$, $4 = 2^2$,

из (Д.4) получаем искомую двоичную запись числа 108:

$108 = 1101100_{(2)}$. (Д.5)

3. Утверждение. *Описанный в п. 2 прием всегда срабатывает при переходе от десятичной записи к двоичной.*

Это утверждение вовсе не очевидно и требует специального доказательства. Проведем его методом математической индукции.

Доказательство.

База индукции. Пусть $a = 1$. В этом случае сделанное утверждение очевидно.

Предположение индукции. Выберем произвольное фиксированное M и предположим, что сделанное утверждение верно для всех натуральных a, не превосходящих M.

Шаг индукции. Докажем, опираясь на предположение индукции, что тогда наше утверждение верно при $a = M + 1$.

Пусть d – наивысшая степень двойки такая, что

$$2^d \le M + 1; \qquad (Д.6)$$

таким образом,

$$2^{d+1} > M + 1. \qquad (Д.7)$$

Рассмотрим разность

$$Q = (M + 1) - 2^d$$

(не ограничивая общности, мы всегда можем считать, что $Q > 0$). Очевидно, что

$$Q < M + 1, \qquad (Д.8)$$

поэтому в силу предположения индукции натуральное число Q может быть представлено в виде суммы степеней двойки именно при помощи алгоритма, рассмотренного выше в п. 2. Однако этого еще недостаточно для наших целей. Необходимо показать, что в двоичное разложение числа Q могут входить только степени двойки с показателями строго меньшими, чем d. Прежде всего, степени двойки с показателями $> d$ в разложение для Q не могут входить в силу (Д.7) и (Д.8).

Далее, покажем, что 2^d также не может входить в упомянутое разложение. Действительно, предположим противное, а именно, что

$$\mathrm{Q} = 2^d + \ldots,$$

т.е.

$$(M + 1) - 2^d = 2^d + \ldots,$$

откуда

$$M + 1 = 2 \times 2^d + \ldots,$$

что, очевидно, противоречит условию (Д.7). Тем самым наше утверждение доказано.

Ответы

К задаче 22: 2(11+5+5) = 3(6+5+3)

К задаче 23: 3(1+6) = 12+6+3

К задаче 24: 2(4+2+2+1) = 10+8

К задаче 25: 7(3+6+9) = 3(7+14+21)

К задаче 26: 3(7+[6+8]+21) = 7(3+[2+4]+9)

К задаче 27: 2(8/7 + 37/7 + 123/7) = 48; 3(1+6+9) = 48

К задаче 28: гири с численными значениями веса 1; 1; 2

К задаче 29: гири с численными значениями веса 1; 1; 2

Литература

1. Локшин, А.А., Бахтина О.В., Сагомонян Е.А. Арифметика на чашечных весах. Изд.2. – М.: МАКС Пресс, 2023. – 36 с.

2. Локшин, А.А. Делимость и гири на чашечных весах (в печати).

3. Кноп, К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – 5-е изд. – М.: МЦНМО, 2016. – 104 с.

4. Козлова, Е.Г. Сказки и подсказки. – М.: МЦНМО, 2004 – 165 с.

5. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. Изд. 3. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 124 с.